

المجموعة N و الحسابيات

تقديم:

N هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

و لدينا $N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$

0 \in N

2 \in N

15 \in N

2,3 \notin N

$\frac{1}{6}$ \notin N

$\sqrt{2}$ \notin N

و لدينا

1- القسمة في N

أنشطة:

$$\begin{array}{r|l} 37 & 4 \\ \hline 1 & 9 \end{array}$$

* أوجد خارج وباقي قسمة العدد 37 على 4

الخارج هو 9 والباقي هو 1

$$\begin{array}{r|l} 217 & 12 \\ \hline 97 & 18 \\ 1 & \end{array}$$

* أوجد خارج وباقي قسمة العدد 217 على 12

الخارج هو 18 والباقي هو 1

$$\begin{array}{r|l} 225 & 45 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

* أوجد خارج وباقي قسمة العدد 225 على 45

الخارج هو 5 والباقي هو 0



ملاحظة:

من خلال الأنشطة السابقة نستنتج أن :

$$37 = 9 \times 4 + 1$$

المقسوم عليه الخارج الباقي
المقسوم

$$217 = 18 \times 12 + 1$$

$$225 = 5 \times 45 + 0$$

ملاحظة هامة:

في عملية القسمة في \mathbb{N} ، يجب أن يكون الباقي أصغر قطعا من المقسوم عليه

قاعدة:

ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين، يوجد عدنان صحيحان طبيعيين q و r بحيث:

$$\begin{array}{r|l} m & n \\ \hline r & q \end{array}$$

$$0 \leq r < n \quad \text{و} \quad m = qn + r \quad (n \neq 0)$$

* عندما يكون باقي قسمة m على n هو صفر نقول إن

n قاسم للعدد m (n يقسم m)

m مضاعف للعدد n (m يقبل القسمة على n)

2- الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية .

أ- تعريف:

* عدد زوجي هو كل عدد يقبل القسمة على 2

* عدد فردي هو كل عدد لا يقبل القسمة على 2

ملاحظة: $m \in \mathbb{N}$

- m عدد زوجي يعني : m يكتب على الشكل التالي: $m=2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

- n عدد فردي يعني : n يكتب على الشكل التالي: $n=2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$)

ب- تمرين:

* بين أن: - مربع عدد زوجي هو عدد زوجي

ومربع عدد فردي هو عدد فردي

- مجموع عددين لهما نفس الزوجية هو عدد زوجي

الجواب :

* ليكن x عدد صحيح طبيعي

$x=2k$ ($k \in \mathbb{IN}$) يعني x عدد زوجي

$$x^2=(2k)^2 \quad \text{إذن :}$$

$$x^2=4k^2 \quad \text{يعني}$$

$$x^2= 2 \times 2k^2 \quad \text{يعني}$$

إذن x^2 عدد زوجي (لأن $2k^2 \in \mathbb{IN}$)

* ليكن a عدد صحيح طبيعي

$a=2L+1$ ($L \in \mathbb{IN}$) يعني a عدد فردي

$$a^2= (2L+1)^2 \quad \text{إذن :}$$

$$a^2= 4L^2+2+2L+1+1^2 \quad \text{يعني}$$

$$a^2= 4L^2+4L+1 \quad \text{يعني}$$

$$a^2= 2(2L^2+2L)+1 \quad \text{يعني}$$

a^2 عدد فردي و منه

* ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين

a و b زوجيان $(x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N})$

نضع $a = 2x$ و $b = 2y$

إذن $a + b = 2x + 2y = 2(x + y)$

ومنه $a + b$ عدد زوجي

a و b عددان فرديان

نضع $a = 2x + 1$ و $b = 2y + 1$ $(x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N})$

إذن $a + b = 2x + 1 + 2y + 1 = 2x + 2y + 2$

$= 2(x + y + 1)$

3- مضاعفات عدد صحيح طبيعي:

أ- تعريف:

ليكن a عدد صحيح طبيعي غير منعدم ($a \in \mathbb{N}^*$)

نقول إن العدد الصحيح m مضاعف للعدد a إذا وفقط إذا كان يقبل m يقبل القسمة على a

يعني : $m=k+a$ ($k \in \mathbb{N}$)

ب- أمثلة :

24 مضاعف العدد 4

4 مضاعف العدد 2

36 مضاعف العدد 9

45 مضاعف العدد 5

30 مضاعف العدد 3

16 مضاعف العدد 8

* كل عدد صحيح طبيعي هو مضاعف العدد 1

* صفر هو مضاعف جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة.

* كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم هو مضاعف لنفسه

* صفر ليست له مضاعفات

ملاحظة :

مجموعة مضاعفات العدد 4 هي :

$$M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$$

- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم عدد لا يحصي من المضاعفات ($a \in \mathbb{N}$) مجموعة مضاعفات العدد a هي :

$$M_a = \{0, a, 2a, 3a, 4a, \dots\}$$

M_a كتبت بتفصيل (كتابة جميع العناصر)

$$M_a \leftarrow M_a = \{ k.a / k \in \mathbb{N} \}$$

كتبت بادراك

ج - خاصيات :

لتكن a و b و c ثلاث اعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة

إذا كان a مضاعف للعدد b و b مضاعف للعدد c

فإن : a مضاعف للعدد c

برهان :

لدينا a مضاعف للعدد b و b مضاعف للعدد c

يعني : $a = k.b$ $k \in \mathbb{N}$

و $b = k'.c$ $k' \in \mathbb{N}$

يعني : $a = k \times k' \times c$ $k' \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$

يعني : $a = (k \times k') \times c$ $(k.k') \in \mathbb{N}$

ومنه a مضاعف للعدد c

إذا كان a مضاعف للعدد b و c مضاعف للعدد b فإن :

$a + c$ و $a.c$ و $a - c$ مضاعفات للعدد b $a \geq c$

إذا كان a مضاعف للعدد b

فإن ac مضاعف للعدد b

تمرين:

بين أن مجموع ثلاث اعداد صحيحة طبيعية متتابة هو مضاعف للعدد 3

جواب:

$$n+(n+1)+(n+2)=n+n+1+n+2 \quad \text{ليكن } (n \in \mathbb{N})$$

$$=3n+3$$

$$=3(n+1)$$

اذن: $n+(n+1)+(n+2)$ مضاعف للعدد 3

4- قواسم عدد عدد صحيح طبيعي:

أ- تعريف:

ليكن a عدد صحيح طبيعي ($a \in \mathbb{N}$)

نقول إن العدد الصحيح الطبيعي d (الغير المنعدم) هو قاسم للعدد a أو d يقسم a إذا وفقط إذا a يقبل القسمة على d

يعني: $a = k.d$ ($k \in \mathbb{N}$)

d قاسم للعدد a يعني a مضاعف للعدد d

ب- امثلة:

12 قاسم للعدد 12

3 قاسم للعدد 9

1 قاسم للعدد 15

25 قاسم للعدد 100

123 قاسم للعدد 0

6 قاسم للعدد 36

ملاحظة:

1- هو قاسم لكل عدد صحيح طبيعي

- كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم هو قاسم للعدد صفر

- ليكن ($a \in \mathbb{N}$)

مجموعة قواسم العدد a نرمز لها بالرمز D_a

$$D_4 = \{1, 2, 4\}$$

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$D_7 = \{1, 7\}$$

ج- خاصيات :

تتكون a و b و c أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة .

إذا كان a يقسم b و b يقسم a

فإن a يقسم c

إذا كان a يقسم b فإن a يقسم bc

إذا كان a يقسم b وكان a يقسم c

فإن a يقسم $b+c$ و يقسم $b-c$ (b, c)

تمرين :

بين أن : 10 يقسم 7^3+3^3

الجواب :

$$7^3 = 343 \quad \text{لدينا}$$

$$3^3 = 27$$

$$7^3 + 3^3 = 370 = 10 \cdot 37 \quad \text{إذن}$$

$$\text{ومنه } 10 \text{ يقسم } 7^3 + 3^3$$

تمرين :

بين أن العدد $A=(3451)^2-(2751)^2$ مضاعف للعدد 70

الجواب :

$$A=(3451)^2-(2751)^2$$

$$=(3451+2751)(3451-2751)$$

$$=6202+700$$

لدينا 70 يقسم 700 (لأن $700=70 \times 10$)

إذن 70 يقسم A

ومنه A مضاعف للعدد 70

5- المضاعف المشترك الأصغر لعددين :

أنشطة :

- * حدد مضاعفات 8 الأصغر قطعا من 100
ثم حدد مضاعفات 6 الأصغر قطعا من 100

$$M_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96\}$$

$$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$$

- المضاعفات المشتركة للعددين 6 و 8 و الغير المنعدمة هي : $\{24, 48, 72, 96\}$

نلاحظ أن $\{24, 48, 72, 96\} = M_8^* \cap M_6^*$

* حدد مضاعفات 4 الغير المنعدمة والأصغر قطعا من 100

ثم حدد مضاعفات 5 الغير منعدمة و الأصغر قطعا من 100

$$M_4^* \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96\}$$

$$M_5^* \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95\}$$

$$M_4^* \cap M_5^* = \{20, 40, 60, 80\}$$

تسمية :

- أصغر مضاعف (غير منعدم) مشترك للعددين 8 و 6 هو 24 ويسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين 8 و 6

$$\text{ونكتب } 8 \vee 6 = 24 \text{ أو } M(8,6) = 24$$

- لدينا $5 \vee 4 = 20$ أو $M(5,4) = 20$

تمرين :

حدد المضاعف المشترك الأصغر لكل من 18 و 15
ثم 26 و 286

الحل :

$$15 \vee 18 = 90$$

$$286 \vee 26 = 286$$

خاصية :

$$b \in \mathbb{N}^* \text{ و } a \in \mathbb{N}^*$$

إذا كان b مضاعف a للعدد فإن $a \vee b = b$



6- القاسم المشترك الأكبر :

أنشطة :

- حدد قواسم كل من 12 و 18
- حدد قواسم كل من 8 و 4
- حدد قواسم كل من 10 و 15

$$D_{12} \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$D_{18} \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

←

$$D_{12} \cap D_{18} = \{1, 2, 3, 6\}$$

6 يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين 12 و 18
و نكتب : $18 \wedge 12 = 6$

$$D_8 \{1, 2, 4, 8\}$$

$$D_4 \{1, 2, 4\}$$

←

$$4 \wedge 8 = 4 \quad \text{لدينا}$$

$$D_{10} \{1, 2, 5, 10\}$$

$$D_{15} \{1, 3, 5, 15\}$$

←

خاصية :

$$a \in \mathbb{N}^* \quad \text{و} \quad b \in \mathbb{N}^*$$

$$a \wedge b = a$$

إذا كان a يقسم b فإن

7- الأعداد الأولية :

أ- تعريف :

نقول إن العدد الصحيح p أولي إذا وفقط إذا كان : للعدد p قاسمان فقط وهما 1 و p

ب- أمثلة :

* 7 عدد أولي

* 2 عدد أولي

* 1 ليس أولي

ج- الأعداد الأولية الأصغر قطعاً من 100:

2-3-5-7-11-13-17-19-23-29-31-37-41-43-47-53-59-61-67-71-73-79-83-89-97

خاصية : $a \in \mathbb{N}^*$ و p عدد أولي

$a \wedge p=1$ إذا كان p لا يقسم a

8- تفكيك عدد صحيح طبيعي :

- لكل عدد طبيعي (أكبر من أو يساوي 2) قاسم أولي

تفكيك عدد صحيح طبيعي هو كتابة هذا العدد على شكل جداء أعداد أولية

$$6=2 \times 3$$

$$75=3 \times 5 \times 5=3.5^2$$

$$318=2 \times 3 \times 53$$

$$6 \wedge 318=2 \times 3=6$$

مثال :

$$6 \vee 318=2 \times 3 \times 53=318$$